Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 2^oP/2013 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 4 - teste na Terça, 12/11 - SALA A2-05

1. Determine os eixos e momentos principais de inércia em relação ao vértice de um cone homogêneo de altura h e raio da base R. Sabendo que o centro de massa do cone encontra-se a uma distância $3h/4$ do vértice, obtenha os eixos e momentos principais de inércia em relação ao centro de massa.

2. O cubo do exemplo 4.6.1 do livro é posto a girar em torno da aresta que coincide com o eixo z.

   i) Determine o vetor momento angular do cubo nesse instante, bem como o ângulo entre este vetor e o vetor velocidade angular.

   ii) Discuta se, para manter o cubo girando com velocidade angular constante ao redor desta aresta, precisamos ou não aplicar um torque externo. Se sim, determine-o; se não, explique por que.

3. Um corpo é constituído por uma haste fina vertical, rígida e uniforme, de massa M, em cuja ponta P estão afixadas duas outras hastes rígidas e uniformes, de comprimento l e massa m. A haste vertical pode rodar livremente (sem atrito) ao redor do eixo vertical z Já as outras duas hastes podem girar, independentemente, ao redor de um mesmo eixo horizontal passando por P. Chamemos de θ_1, θ_2 os ângulos que cada haste forma com respeito à direção $-\hat{z}$.

   a) Considere inicialmente o sistema do ponto de vista de um referencial não-inercial girando com velocidade $\dot{\phi}(t)$ (possivelmente variando no tempo) ao redor do eixo z. Determine as forças (reais e fictícias) que agem sobre cada haste lateral, e calcule ainda o torque com respeito a P devido a cada uma delas. Desenhe um diagrama ilustrando essas forças.

   Observação: Não esqueça que as hastes são corpos extensos, de modo que, para cada força ou torque, é necessário integrar ao longo da haste para obter a resultante.

   b) Um agente externo mantém a haste vertical girando com velocidade angular $\dot{\phi} = \omega$ **fixa**. Mostre que, de acordo com o valor de ω, duas possibilidades podem ocorrer: i) Para ω abaixo de um certo valor crítico ω_c, o torque total sobre cada haste lateral no referencial girante é $\neq 0$ exceto se $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Essa é então a única configuração de equiíbrio. ii) Para $\omega > \omega_c$, passa a existir um ponto de equiíbrio onde $\theta_1 = \theta_2 \neq 0$. Encontre ω_c e o ângulo de equlíbrio quando $\omega > \omega_c$.

   c) Escreva a Lagrangeana do sistema em um referencial inercial, nas mesmas condições do item (b). Obtenha as eqs. de Lagrange e use-as para recuperar os mesmos resultados do item (b) (com menos esforço...).

   d) Discuta o que ocorre se as hastes são colocadas em um valor de $\theta_1 = \theta_2$ ligeiramente diferente daquele de equilíbrio.

4. Uma placa retangular homogênea com altura h e largura l encontra-se em repouso no espaço vazio.

   a) Encontre os seus eixos principais de inércia, e calcule os momentos principais de inércia com respeito ao centro de massa.

   b) Forças impulsivas iguais e opostas são aplicadas simultaneamente, durante um intervalo curto dt, nas extremidades de uma diagonal da placa. As forças têm direção perpendicular ao plano. Mostre que a velocidade angular $\vec{\omega}$ adquirida pela placa nesse intervalo aponta na direção da outra diagonal.

   c) Após o impulso inicial, a placa é deixado livre para girar, sem sofrer torques. Supondo $h > l$, explique (justificando) se a direção de $\vec{\omega}$ continuará a mesma, ou se mudará com o tempo, do ponto de vista do referencial fixo ao corpo. E se $h = l$?

5. Um automóvel parte do repouso com aceleração constante a e uma porta totalmente aberta, fazendo um ângulo de $90°$ com o corpo do veículo.

   a) Tratando a porta como um retângulo homogêneo de altura h e largura l, calcule o seu momento de inércia na direção vertical com respeito a um ponto sobre o eixo de rotação.

   Sugestão: use o resultado do item anterior, e o teorema dos eixos paralelos.

   b) Escreva a Lagrangeana e a equação de movimento da porta ao redor do seu eixo, levando em conta que o referencial do carro é equivalente a um referencial inercial com aceleração 'gravitacional' fictícia no sentido oposto ao do movimento.

c) Analise o mesmo problema utilizando as equações de Euler, e chegue na mesma equação de movimento.

d) Integre essa equação, e mostre que o tempo decorrido até a porta se fechar é dado por

$$t_F = \sqrt{\frac{l}{3a}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}.$$

Sugestão: Procure um fator integrante para a equação diferencial, ou então uma constante do movimento.

e) Se $l = 1,2m$ e o carro acelera uniformemente de 0 a 100km/h em 10s, mostre que o $t_F \simeq 1s$

Sugestão: a integral não pode ser expressa por funções elementares (é uma 'integral elíptica'). Obtenha seu valor numérico numa tabela ou usando um pacote computacional ou webapp. Por exemplo: www.WolframAlpha.com.

6. Uma nave espacial cilíndrica de raio r e altura $h = 3r$ está à deriva no espaço profundo, rotacionando com velocidade angular $\vec{\omega} = \Omega \hat{e}_2$ ao redor de um eixo ortogonal ao eixo de simetria do cilindro, $\hat{e}_3$.

   Em um determinado instante, astronautas acionam motores laterais situados simetricamente ao redor do eixo $\hat{e}_3$, os quais aplicam um torque constante $\vec{N} = N_3 \hat{e}_3$ com respeito ao centro de massa da nave.

   Dados: momentos principais de inércia do cilindro: $I_1 = I_2 = \frac{M}{12}(3r^2 + h^2) = Mr^2; I_3 = \frac{Mr^2}{2}$

   a) Determine $\omega_3(t)$.

   b) Prove que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ é uma constante de movimento, e em seguida determine $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$.

   Dica: Baseado na 1a parte do item, busque soluções da forma $\omega_1 = cte. \operatorname{sen}(\phi(t)), \omega_2 = cte. \cos(\phi(t))$.

   c) Os astronautas desligam os motores após um intervalo $t \gg \Omega I_3 / N_3$. Sem fazer mais contas, discuta como fica o vetor $\vec{\omega}$ ao final deste período, e o que ocorre posteriormente com ele. *Dica: vide exemplo 4.8.2*

7. Em $t = 0$ um pião simétrico é colocado em movimento com um ângulo θ tal que $\cos\theta = \sqrt{3} - 1$, e com $\dot{\theta} = 0$.

   a) Encontre quais devem ser ainda as condições iniciais de $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ para que o movimento tenha as duas constantes p_ϕ e p_θ ambas iguais a $\sqrt{3 I_1 m g l}$

   b) Encontre o potencial efetivo $V_{ef}(\theta)$ para este caso. Obtenha seus pontos de equilíbrio, verificando ainda se são estáveis ou instáveis. No caso de pontos estáveis, encontre a frequência de pequenas oscilações ao seu redor.

   c) Dadas as condições iniciais, descreva como serão os movimentos de precessão e nutação do pião. O que ocorreria se as condições iniciais fossem semelhantes mas com um valor pequeno mas não nulo de $\dot{\theta}$?